Die Weierstraß Darstellung für Minimalflächen: (Ossermann, § 8)

Nach den vorstehenden Überlegungen reduziert sich die Fragestellung darauf, bei gegebenem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen $\phi_k : \Omega \to \mathbb{C}$, $k = 1,2,3$, zu finden mit

$$(\mathrm{I}) \qquad \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \quad \text{auf } \Omega .$$

Es gilt

SATZ 3.1: Sei $g : \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph (also holomorph bis auf Polstellen als mögliche Singularitäten). $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit folgender Eigenschaft: Hat g in z ein Pol der Ordnung m, soll f in z von der Ordnung $\geq 2 \cdot m$ verschwinden. Dann sind die Funktionen

$$(\mathrm{II}) \qquad \phi_1 := \tfrac{1}{2} f (1 - g^2), \quad \phi_2 := \tfrac{i}{2} f (1 + g^2), \quad \phi_3 := f \cdot g$$

holomorph in Ω und Lösungen von (I). Ist umgekehrt ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ein Lösungsatz von (I), der nicht von der Gestalt

$$\phi_1 = i\,\phi_2, \quad \phi_3 = 0$$

ist, so findet man f, g wie oben beschrieben und der Eigenschaft, daß ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 durch die Formeln (II) gegeben sind.

BEMERKUNG: Sind f, g wie oben, so nennt man die Relationen

$$F_1(z) = \mathrm{Re}\int^z \frac{1}{2} f(1-g^2)\, d\xi,$$

$$F_2(z) = \mathrm{Re}\int^z \frac{i}{2} f(1+g^2)\, d\xi,$$

$$F_3(z) = \mathrm{Re}\int^z f\cdot g\, d\xi$$

Weierstraß Darstellung der "Minimalfläche $F(\Omega)$". Hierbei ist die Bezeichnung Minimalfläche so zu verstehen, daß Verzweigungspunkte und Selbstdurchschneidungen zulässig sind, die Einschränkung von F auf kleine Gebiete Ω' ohne Verzweigungspunkte aber reguläre konforme Parametrisierungen von Flächen mit mittlerer Krümmung 0 sind.

(Anmerkung: eine Funktion $g: \Omega - \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt auf Ω meromorph, wenn Λ eine abzählbare Teilmenge von Ω ist, die sich höchstens zum Rand $\partial\Omega$ von Ω häuft und wenn g in jedem Punkt $z \in \Lambda$ eine Polstelle hat.

vgl. Cartan BI Taschenbuch, Def auf p.45 oder
Behnke – Sommer p. 201

Meromorphe g haben die Form $g = \varphi/\psi$ mit holomorphen φ, ψ, wobei φ ohne Nullstelle ist und ψ nicht identisch verschwindet.)

Beweis von Satz 3.1:

Seien f, g wie im Satz beschrieben und ϕ_k, $k=1,2,3$ gemäß (II) erklärt. Ist z_0 Pol der Ordnung m von g, so folgt die Beschränktheit von $f\cdot g^2$ bei $z \to z_0$, so daß die Singularität z_0 von $f\cdot g^2$ hebbar ist. Erst recht hat $f\cdot g$ bei z_0 keine Singularität, mithin sind ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 auf Ω holomorph. Die Gültigkeit von (I) rechnet man nach.

Seien umgekehrt ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 holomorphe Lösungen von (I) nicht vom Typ

$$\phi_1 = i\,\phi_2, \quad \phi_3 = 0.$$

Man setzt dann (multipliziere die 2^{te} Gleichung aus (I) mit $-i$ und addiere zur ersten $\Rightarrow f$)

$$f := \phi_1 - i\,\phi_2 \qquad \text{(holomorph)},$$

$$g := \phi_3 \Big/ \phi_1 - i\,\phi_2 \qquad \text{(meromorph)}.$$

Aus (I) folgt

$$(\phi_1 - i\,\phi_2)\cdot(\phi_1 + i\,\phi_2) = -\phi_3^2,$$

also

$$\phi_1 + i\,\phi_2 = -\phi_3^2 \Big/ \phi_1 - i\,\phi_2 = -f\cdot g^2.$$

Die linke Seite ist auf Ω holomorph, also ist $f\cdot g^2$ holomorph, und das ist nur möglich, wenn f in den Polen von g mindestens eine Nullstelle der doppelten Ordnung hat.
Daß schließlich mit den oben definierten Funktionen f, g die Beziehungen (II) bestehen, rechnet man einfach nach.

$\blacksquare$

<u>ZUSATZ:</u> (über das Nichtvorhandensein von Verzweigungspunkten)
Sind f, g wie im Satz und gilt zusätzlich, daß f in jedem Pol von g der Ordnung m eine Nullstelle der Ordnung genau $2\cdot m$

hat und daß die Nullstellen von f genau die Polstellen von g sind, so ist F ohne Verzweigungspunkte.

Beweis: z ist genau dann Verzweigungspunkt von F, wenn

$$|\phi_1(z)|^2 + |\phi_2(z)|^2 + |\phi_3(z)|^2 = 0$$

gilt, wobei ϕ_k, $k=1,2,3$, mit f und g gemäß (II) erklärt sind.

Speziell ist (vgl. die vorige Rechnung)

$$0 = \phi_1(z) + i\,\phi_2(z) = -f(z)\cdot g^2(z)$$

und auch

$$0 = \phi_1(z) - i\,\phi_2(z) = f(z).$$

Mithin ist z Nullstelle von f (der Ordnung $2m$) und daher Pol von g der Ordnung m. Vermöge dieser Ordnungsbeziehungen kann $f(z)\,g^2(z)$ aber nicht verschwinden.

■

BEISPIEL: $f(z) = z^2$, $g(z) = 1/z$,

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2}(z^2-1), \quad \phi_2(z) = \frac{i}{2}(z^2+1), \quad \phi_3(z) = z,$$

$$F_1(z) = \operatorname{Re}\int_0^z \frac{1}{2}(\xi^2-1)\,d\xi = \operatorname{Re}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{1}{2}z\right),$$

$$F_2(z) = \operatorname{Re}\int_0^z \frac{i}{2}(\xi^2+1)\,d\xi = \operatorname{Re}\, i\left(\frac{z^3}{6} + \frac{1}{2}z\right),$$

$$F_3(z) = \operatorname{Re}\int_0^z \xi\,d\xi$$

, also

$$F_1(x,y) = \frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2) - \frac{1}{2}x,$$

$$F_2(x,y) = \frac{1}{6}(y^3 - 3x^2y) - \frac{1}{2}y, \quad F_3(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

Das ist bis auf Ähnlichkeiten die sogenannte <u>Enneper'sche Minimalfläche</u>, die man z.B. bei Do Carmo, p. 205, abgebildet findet. Man vergleiche dazu auch [K. Leichtweiß "Minimalflächen im Großen", BI Überblicke Mathematik Bd 2, 1969]. Die Enneper-Fläche ist ohne Verzweigungspunkte (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 haben keine gemeinsamen Nullstellen), allerdings treten Selbstdurchschneidungen auf (→ Do Carmo, p. 206).

□

Die vorstehenden Überlegungen haben mehrfach ausgenutzt, daß man lokal konforme Parameter einführen kann. Ob dies aber tatsächlich geht, ist nicht ganz offensichtlich. <u>Tatsächlich kann man auf jeder Fläche lokal konforme Koordinatensysteme einführen</u>, eine Ausarbeitung findet man z.B. bei L. Bers, "Riemann Surfaces" Seite 15-35. Wir begnügen uns damit, den Existenzbeweis für Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung zu führen, die Argumente sind dann wesentlich einfacher.

<u>SATZ 3.2:</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ sei regulär, d.h. injektiv, glatt und mit maximalem Rang. Außerdem sei die mittlere Krümmung von $S = F(\Omega)$ identisch 0. Dann hat jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung U, so daß $U \cap S$ über einem Gebiet der Ebene <u>konform</u> parametrisiert werden kann.

Beweis: Sei $p \in S$ beliebig. Da die vorgegebene Parametrisierung überall

Rang 2 hat, kann man S so im Raum $\mathbb{R}^3$ drehen, daß S lokal bei p Graph einer Funktion $f(x_1, x_2)$ ist, d.h. man findet

$$D_R(a) := \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < R^2 \}$$

und $\quad f : D_R(a) \longrightarrow \mathbb{R} \quad$ mit

$$S \cap U(p) = \{ (x_1, x_2, f(x_1,x_2)) : (x_1,x_2) \in D_R(a) \}$$

für eine geeignete Umgebung $U(p) \subset \mathbb{R}^3$ von p. Hierbei ist zu beachten, daß die mittlere Krümmung eine gegen Rotationen invariante Größe ist und daß man konforme Parametrisierungen mit Rotationen verketten kann, ohne die Konformität zu zerstören.

Man setzt

$$\varphi_1 := (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \quad (1 + (\partial_1 f)^2),$$

$$\varphi_2 := (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \quad \partial_1 f \cdot \partial_2 f \qquad \text{auf } D_R(a)$$

und hat

$$\partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_2 = -\frac{1}{2} (1 + |\nabla f|^2)^{-3/2} \cdot \Big[2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2)$$

$$+ 2 \cdot \partial_2 f \cdot \partial_2 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2) - \partial_1 f \cdot \partial_2 f \cdot 2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_1 f - 2 \cdot \partial_1 f \partial_2 f \cdot \partial_2 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \Big]$$

$$+ (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \Big[2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f - \partial_1 \partial_1 f \cdot \partial_2 f - \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \Big] =$$

$$-\frac{1}{2} (1 + |\nabla f|^2)^{-3/2} \cdot \Big[2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2) + 2 \cdot \partial_2 f \cdot \partial_2 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2)$$

$$-2 (\partial_1 f)^2 \, \partial_2 f \cdot \partial_1 \partial_1 f - 2 (\partial_2 f)^2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f$$

$$-4\,\partial_1 f\cdot\partial_1\partial_2 f\cdot(1+|\nabla f|^2) + 2\cdot(1+|\nabla f|^2)\cdot\partial_1\partial_1 f\cdot\partial_2 f$$
$$+\,2\cdot(1+|\nabla f|^2)\,\partial_1 f\cdot\partial_1\partial_2 f\;\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot(1+|\nabla f|^2)^{-3/2}\cdot\Big[2\cdot\partial_1 f\cdot\partial_1\partial_2 f\cdot\Big\{(1+(\partial_1 f)^2)-(\partial_2 f)^2-2(1+|\nabla f|^2) + (1+|\nabla f|^2)\Big\}$$
$$+\,2\cdot\partial_2 f\cdot\partial_2\partial_2 f\cdot(1+(\partial_1 f)^2)$$
$$+\,\partial_2 f\cdot\partial_1\partial_1 f\cdot\Big\{-2(\partial_1 f)^2+2\cdot(1+|\nabla f|^2)\Big\}\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\,(1+|\nabla f|^2)^{-3/2}\cdot\Big[2\cdot\partial_1 f\cdot\partial_1\partial_2 f\cdot\big(-2\cdot(\partial_2 f)^2\big)$$
$$+\,2\cdot\partial_2 f\cdot\partial_2\partial_2 f\cdot(1+(\partial_1 f)^2)$$
$$+\,2\cdot\partial_2 f\cdot\partial_1\partial_1 f\cdot(1+(\partial_2 f)^2)\Big]$$

$$= -\partial_2 f\cdot(1+|\nabla f|^2)^{-3/2}\cdot\Big[-2\cdot\partial_1 f\cdot\partial_2 f\cdot\partial_1\partial_2 f$$
$$+\,\partial_1\partial_1 f\cdot(1+(\partial_2 f)^2)+\partial_2\partial_2 f\cdot(1+(\partial_1 f)^2)\Big]$$

$$= 0,$$

denn in [...] steht ja gerade die nichtparametrische Minimalflächengleichung für f.

Aus $\partial_2 \mathcal{S}_1 = \partial_1 \mathcal{S}_2$ folgt: es gibt eine (bis auf Konstanten eindeutige) Potentialfunktion

$$\Phi : D_R(a) \to \mathbb{R} \quad ,$$

d.h.

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_1 \Phi = \varphi_1 = \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} \cdot \left(1+(\partial_1 f)^2\right), \\ \partial_2 \Phi = \varphi_2 = \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} \quad \partial_1 f \cdot \partial_2 f , \end{cases}$$

die man sofort explizit angeben kann. Im Fall $(a_1, a_2) = (0,0)$ (sonst nehme man eine Translation vor) ist zum Beispiel

$$\Phi(x_1,x_2) := \int_0^1 (\varphi_1, \varphi_2)(tx_1, tx_2) \cdot (x_1,x_2)\, dt$$

eine mögliche Wahl, denn

$$\partial_1 \Phi(x_1,x_2) = \int_0^1 \Big\{ t \cdot (\partial_1 \varphi_1, \partial_1 \varphi_2)(tx_1,tx_2) \cdot (x_1,x_2) + (1,0) \cdot (\varphi_1,\varphi_2)(tx_1,tx_2) \Big\}\, dt$$

$$= \int_0^1 \Big\{ \varphi_1(tx_1,tx_2) + \big(x_1 \cdot \partial_1 \varphi_1(tx_1,tx_2) + x_2\, \partial_1 \varphi_2(tx_1,tx_2)\big) \cdot t \Big\}\, dt$$

$$= \int_0^1 \Big\{ \varphi_1(tx_1,tx_2) + \underbrace{\big(x_1 \cdot \partial_1 \varphi_1(\ldots) + x_2 \cdot \partial_2 \varphi_1(\ldots)\big)}_{= \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_1(tx_1,\, tx_2)\right)} \cdot t \Big\}\, dt$$

$$= \int_0^1 \Big\{ \varphi_1(tx_1,tx_2) + t \cdot \frac{\partial}{\partial t}\big(\varphi_1(tx_1,tx_2)\big) \Big\}\, dt$$

$$= (\text{part. Int.}) = \varphi_1(x_1,x_2),$$

und entsprechend $\partial_2 \Phi = \varphi_2$.

Analog zu φ_1, φ_2 definieren wir weiter die Funktionen